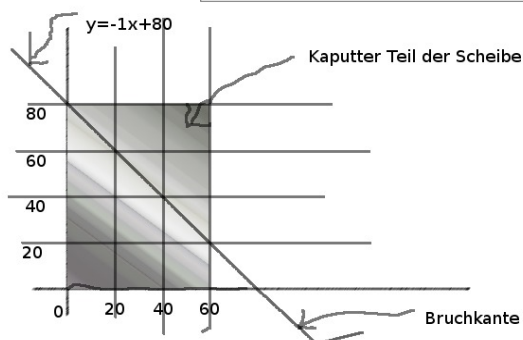




Extremwertaufgaben

Sobald man verstanden hat, was ein Extremwert einer Funktion ist (ein lokales Maximum oder Minimum) stellt sich die Frage „Und was mach ich damit??“.

Damit diese nicht unbeantwortet bleibt und man nicht nur mit Höhenzügen von Bergen oder dem Tiefpunkt einer Achterbahn rechnen muss, hat das Mathebuch die Extremwertaufgaben erfunden.



Die häufigste Fragestellung in der Geschichte (vor allem in der Wirtschaft) ist „Wie hohle ich das meiste dabei raus?“. Das mathematisch-meiste in der Analysis ist der Hochpunkt, das mathematisch kleinste entspricht dem Tiefpunkt einer Funktion. Man kann beispielsweise nach der größtmöglichen Fläche suchen, oder wie man den geringsten Aufwand betreibt.

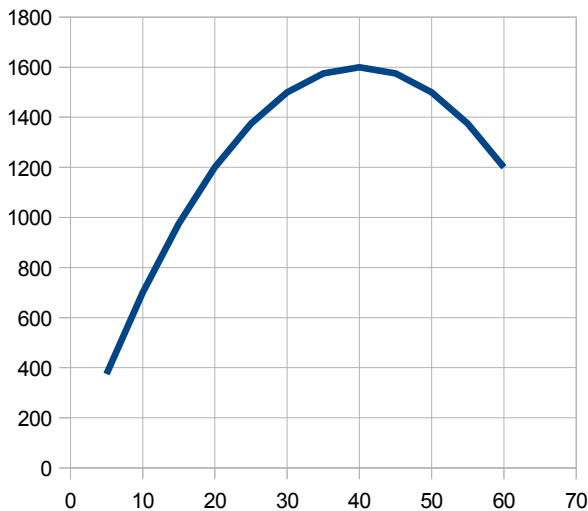
Um vorerst bei den geometrischen Aufgaben zu bleiben, stelle dir folgendes Problem vor:

An einer Glasscheibe von 60cm mal 80cm ist eine Ecke abgebrochen.
Wir wollen nun das größte rechteckige Stück aus der Scheibe schneiden.

Zum einen haben wir die Funktion, die die Bruchkante darstellt (die habe ich aus der Zeichnung abgelesen..wie ich das gemacht habe ist ein anderes Thema....): $y = -1x + 80$, hier ist y die Höhe der Scheibe, wenn x deren Breite ist. Zum anderen wissen wir aus dem Geometrieunterricht der Mittelstufe, das die Fläche eines Rechtecks $A = y \cdot x$ ist. Die Maximalfläche kann also einfach durch eine Tabelle gefunden werden, ich muss nur x wissen, y dann mit der Formel ausrechnen und beides miteinander malnehmen:

Tabelle: x entspricht der Breite der Fläche, y entspricht Ihrer Länge, A Ihrer Fläche.													
x (Breite)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	Seite1
$y = -1x + 80$	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	Seite2
$A = y \cdot x$	375	700	975	1200	1375	1500	1575	1600	1575	1500	1375	1200	Fläche

Schon sieht man, das bei $A=1600$ die größte Fläche erreicht ist. Aus der Tabelle kann man jetzt auch einen Graphen erstellen: Auf der X-Achse trägt man x ab (was sonst?) auf der y.... nein, nicht y, sondern die Fläche A! Das Ergebnis sieht man auf der nächsten Seite.

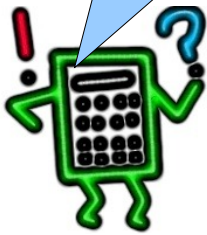


Aus beidem kann man deutlich erkennen, das, wenn $x=40\text{ cm}$ ist, die Fläche mit 1600cm^2 die größtmögliche Fläche gefunden ist.

Die Funktion $y=mx+b$ (hier $y=-1x+80$), welche die „Bruchkante“ beschreibt, heißt „Nebenbedingung“. Sie stellt klar, welche Abhängigkeit zwischen den Variablen x und y besteht.

$A=x*y$ heißt „Hauptbedingung“. Hauptbedingung hier ist, das ich eine Fläche aus Höhe (y) und Breite (x) ausrechnen will, die Maximal sein soll. Wollte ich etwas anderes ausrechnen (einen Kreis, Dreieck, Straßenbreite....) wäre meine Hauptbedingung anders.

WER DENKT SICH
SCHON SOWAS AUS?

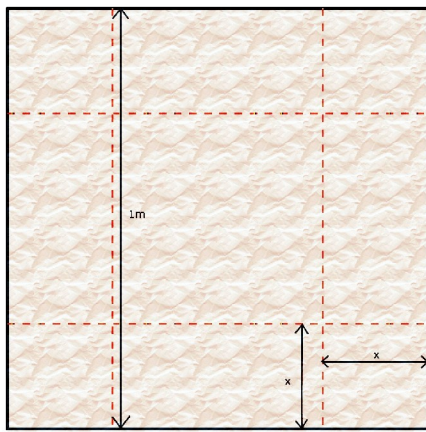


Der Mensch an sich denkt sich

Extremwertaufgaben aus, er merkt es nur selten. Wir Menschen machen das oft, weil wir zu wenig Zeit (oder Geld.... oder sonst was) haben.

Außerdem sind Menschen faul, wir leben nicht Ewig und müssen somit in kurzer Zeit möglichst viel schaffen, mit möglichst wenig Aufwand. Ich laufe beispielsweise nur zum nächsten Bäcker, auch wenn der übernächste 3 Cent billiger wäre – meine Faulheit siegt über meinen Geiz. Ich suche also eine Möglichkeit, möglichst wenig Weg hinter

mich zu bringen, und dabei nicht unnötig viel Geld auszugeben. Auch will man das größte Stück Torte, die kürzeste Strecke in den Urlaub... die wenigste Arbeit bei den Hausaufgaben....



Man geht beim Lösen von Extremwertproblemen so vor:

- 1.) Hauptbedingung finden
- 2.) Nebenbedingung finden
- 3.) Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen (evtl. vereinfachen!) ergibt die sogenannte „Zielfunktion“
- 4.) Zielfunktion ableiten
- 5.) Nullstelle der Ableitung (Extremwert) finden.

Und danach noch, falls nötig, in die Nebenbedingung einsetzen.

Sagen wir, ich will aus Karton eine Kiste basteln. Ich hab 1 m^2 (also, $1\text{ m} \times 1\text{ m}$) Karton.

1.) $V = x \cdot b^2$

Hauptbedingung – Das Volumen ist die Höhe x mal Breite b mal Tiefe b

2.) $b = 1 - 2x$

Das ist meine Nebenbedingung – die Kistentiefe und -breite ist 1 m weniger $2x$, denn meine Kiste soll $x\text{ m}$ hoch werden

3.) $V(x) = x \cdot (1 - 2x)^2$

$V(x) = x \cdot (1 - 4x + 4x^2)$

$V(x) = x - 4x^2 + 4x^3$ (das ist die Zielfunktion!)

4.)

$V(x) = x - 4x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 1 - 8x + 12x^2$

$0 = 1 - 8x + 12x^2$

5.)

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

$x_{1/2} = +\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\right)}$

$x_1 = +0,1667$

$x_2 = +0,5$



Wir finden also, dass wenn wir 16,7 cm oder 50 cm links und rechts umfalten, das Maximalvolumen finden. Wirklich? Was würde wirklich passieren, wenn ich den 1-m-Karton bei 50cm falte? Die Kiste hätte gar kein Volumen, das wäre das Minimum. Man muss also am Ende noch überlegen, ob der Extremwert wirklich zu einem Maximal- oder einem Minimalvolumen führt (hinreichendes Kriterium 2. Ableitung!)

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$V(x)$	40500	64000	73500	72000	62500	48000	31500	16000	4500	0

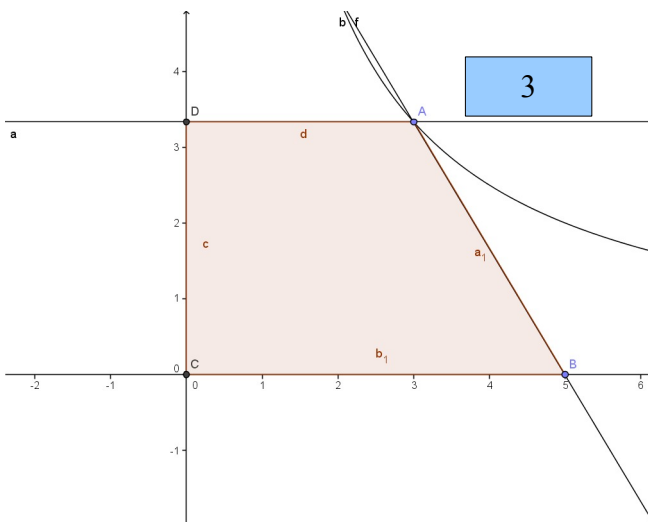
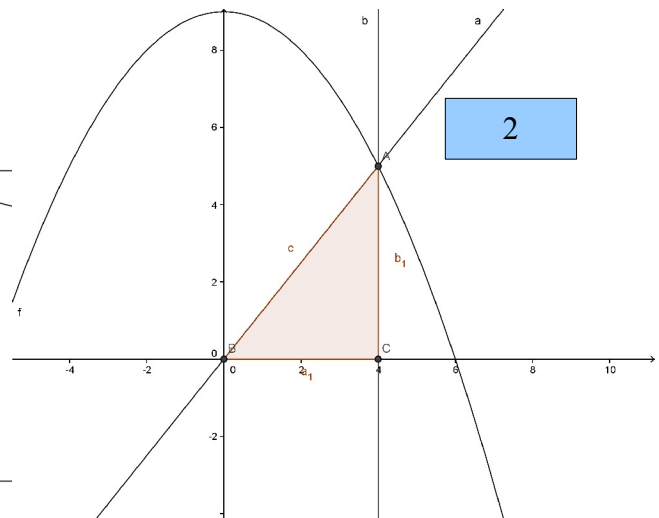
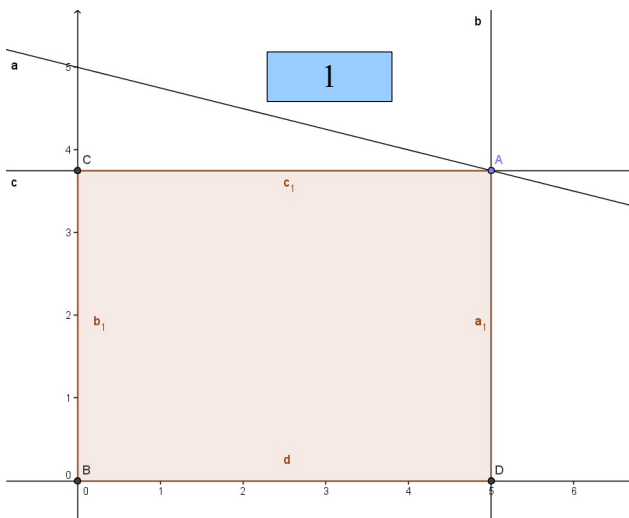
Einsetzen von 0,1667 in $V(x)$ liefert uns (nach umrechnen von m^3 in cm^3) ein Maximalvolumen von $74074,07\text{ cm}^3$, also rund 74 Liter.

Aufgaben dazu:

- 1.) Wie groß ist die Maximale Fläche eines Rechtecks mit 1m Umfang?
- 2.) a.) Wie groß ist das größte Rechteck, das man in ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 10 cm einzeichnen kann, wenn eine Rechteckseite an der Dreiecksseite liegt?
b.) Bei beliebiger Seitenlänge b?
- 3.) Welches Volumen hat die größtmögliche Schachtel, die man aus einem A4-Blatt (ca. $210 \times 300 \text{ cm}^2$) falten kann?
- 4.) Aus einem 60cm langen Stück Draht soll der größtmögliche Quader mit Quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Wie lang sind die jeweiligen Kanten?
- 5.) Wie viel Blech benötigt man für die optimale 1-L-Konservendose (niedrigster Blechverbrauch)? Ändern sich die Maße, wenn man die Konservendose „ohne Deckel“ herstellt?
- 6.) Recht Schwierig: Vom Punkt A(0,9) soll eine Gasleitung zum Punkt B(9,0) verlegt werden. Die Kosten hierfür betragen 5000€/km entlang einer der x-Achse folgenden Straße, Querfeldein 15000 €/km. An welchem Punkt muss die Gasleitung von der Straße abzweigen, um am Kostengünstigsten verlegt zu werden?
- 7.) Schwieriger: Welches Volumen hat die größte Pyramide, die man aus einem 1m- Quadrat falten kann? Zwischenergebnis: Der Boden der quadratischen Pyramide hat die Seitenlänge 40 cm... Wie viel % des Papiers werden übrigbleiben?

Problemstellung 1: Von Kurven begrenzte Flächen

	Rechteck $x \cdot y$	Dreieck $\frac{x \cdot y}{2}$	Trapez $x \cdot y + \frac{(5-x) \cdot y}{2}$
$y = 5 - 0.25x$	Zielfunktion Bild1	Zielfunktion	Zielfunktion
$y = -x^2 + 9$	Zielfunktion	Zielfunktion Bild2	Zielfunktion
$y = \frac{10}{x}$	Zielfunktion	Zielfunktion	Zielfunktion Bild3



Problemstellung 2 – Minimalentfernungen

Das Problem, das zu lösen ist, ist folgendes:

Man hat eine gegebene Kurve, sagen wir, $g: y=0.25x+2$, und wollen wissen, welcher Punkt der Kurve die geringste Entfernung zu einem anderen Punkt, $P(4,2)$ hat.

Die „Entfernung zweier Punkte im Koordinatensystem“ ist (bekannt!!) $d=\sqrt{((y-y_p)^2+(x-x_p)^2)}$, wobei x_p und y_p die x und y Koordinaten des Punktes P sind, und x sowie y sich aus der Funktion ergeben.

„d“ ist, nach einsetzen,

$$d=\sqrt{((0.25x+2-2)^2+(x-4)^2)}$$

Klammern auflösen....

$$d=\sqrt{(1.0625x^2-8x+16)}$$

Ableiten mittels Kettenregel

$$d'=-\frac{(2.125x-8)}{2\cdot\sqrt{1.0625x^2-8x+16}}$$

Und, da der ganze Bruch = 0 ist, wenn der Zähler = 0 ist, folgt x aus

$$0=-2.125x+8$$

$$x=\frac{8}{2.125}=\frac{64}{17}$$

DIE ABLEITUNG DER WURZELN KANN MIT COMPUTERALGEBRA-PROGRAMMEN WIE EIGENMATH ERHALTEN WERDEN...



der Punkt $Q\left(\frac{64}{17}, \frac{50}{17}\right)$ ist demnach der Punkt auf der Kurve, der dem Punkt $P(4,2)$ am nächsten ist.

Achtung: Diese Lösung ist völlig unnötig, wenn die Rechnung mit allen nötigen Gedankengängen nicht selbst bewerkstelligt wurde!

Weiterführende Aufgabe: Zeige, dass die Gerade durch $P(4,2)$ und den „nächsten Punkt“ Q senkrecht auf der Gerade g liegt!

