Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *monoton steigend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} > a_n$.

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *streng monoton steigend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geqslant a_n$.

Beispiele:

$a_n = n$ $a_n = \sqrt{n}$ $a_n = n^3$ sind monoton wachsende Folgen.

Nachweis der Monotonie:

Ist eine Folge streng monoton steigend, so gilt, dass das „Folgeglied“ a_{i+1} größer als a_i sein muss. Ist das so, so ist die Folge monoton steigend. Analoges gilt für „monoton fallend“

Bsp: $a_n = \sqrt{n}$; $a_i = \sqrt{i}$; $a_{i+1} = \sqrt{i+1}$

Die Frage ist nun, ob $\sqrt{i+1}$ wirklich größer als $\sqrt{i}$ ist.

Der Beweis könnte folgendermaßen laufen: Suchen wir uns zwei Zahlen a und b, wobei beide positiv und a größer als b ist.

Warum sind das Voraussetzungen?

Dann gilt automatisch, das auch $a^2 > b^2$ ist .

Wegen der Binomischen Formeln, müsste man separat zeigen

$$\sqrt{i+1} > \sqrt{i}$$

Der erste Schritt ist die Behauptung;

$$(\sqrt{i+1})^2 > (\sqrt{i})^2$$

dann wird (aufgrund unseres Wissens über binomische Formeln) quadriert;

$$i+1 > i$$

$$1 > 0$$

und zum Schluss eine offensichtliche Wahrheit gefolgert.

So funktionieren viele Beweise der Monotonie. Noch einer?

$a_n = n^2$; $a_i = i^2$; $a_{i+1} = (i+1)^2$

$i^2 < (i+1)^2$

$i^2 < (i^2 + 2\mathrm{i} + 1)$

$i^2 < i^2 + 2\mathrm{i} + 1$

$0 < 2\mathrm{i} + 1$ und das gilt, sofern i größer als -0,5 ist.

Wir benötigen allerdings für kompliziertere Folgen noch ein paar Aussagen über Summen, Produkte und Quotienten von Folgen:

Wenn a_n und b_n beides monoton wachsende Folgen (m.w.F) sind, dann ist auch ihre Summe $c_n = a_n + b_n$ eine m.w.F

Beispiel:

$c_n = \sqrt{n} + \log(n)$

$a_n = \sqrt{n}$ und $b_n = \log(n)$

Dass für die Wurzel Monotonie gilt, wissen wir schon, dass für den log(n) Monotonie gilt, können wir zeigen (mach mal ;))

Wenn also beides mit wachsendem n größer wird – naja, was wird dann für die Summe gelten?

Aber zeigen müssen wir das trotzdem noch:

$a + b < (a+z) + (b+z)$

$a + b < a + b + 2z$

$0 < 2z$

Was ja irgendwie so ist. Genauso (äähh.. ähnlich! Vorsicht mit den Vorzeichen! Fallunterscheidung!) geht das mit der Multiplikation (selbst machen ;))

(Summenwachstum, Produktwachstum)

Nun fehlt noch so etwas wie der Quotient. Der ist schwieriger, also brauchen wir ein wenig Vorbereitung.Wir werden unsere behauptungen darauf bauen, dass wir das mit dem Produkt schon können....

Ich behaupte : Wenn a_n eine m.w.F und größer als 0 ist, dann ist $\frac{1}{a_n}$ eine monoton fallende Folge größer 0 – und andersherum.

Beweis: Sagen wir, a_n ist 5. Der Mathematiker sagt dazu: oBdA - ohne Beschränkung der Allgemeinheit - soll heißen, ist ja Wurscht was a_n ist.

Das nächste Folgeglied soll ja größer sein, sagen wir a_{n+1} ist $5+x$; $(x>0)$

Es gilt:

$5<5+x$ ach nee?

$\frac{5}{5+x}<1$ Bla bla.....

$\frac{1}{5+x}<\frac{1}{5}$ Ohh wie schlau....ähhh... Stop, wir haben gerade unsere Behauptung bewiesen! Wieso?

Genau so kann man Dinge über Quotienten zeigen:

Wir setzen voraus, das a_n und b_n monoton wachsen und positiv sind.

Dann gilt ja, dass $a_n \cdot b_n$ auch wächst.

Der Kehrwert einer monoton fallenden Folge ist eine monoton steigende Folge.

Deswegen ist es so, das $\frac{a_n}{b_n}$ monoton steigend ist, wenn a_n eine m.w.F und b_n eine m.f.F ist.

Wer bis hierhin folgt: Klasse! Nicht? Also, wieder ein Beispiel:

$a_n = n+1$ ist monoton wachsend

$b_n = 1/\sqrt{n+3}$ ist monoton fallend

$c_n = \frac{a_n}{b_n}$ $c_n = \frac{n+1}{1/\sqrt{n+3}}$

$c_n = (n+1) \cdot \sqrt{n+3}$

und da sowohl $n+1$ als auch $\sqrt{n+3}$ monoton wachsend sind, ist auch ihr Produkt monoton wachsend.

N=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a(n)=	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b(n)=	0,500	0,447	0,408	0,378	0,354	0,333	0,316	0,302	0,289	0,277
c(n)=	4,000	4,472	9,798	13,229	16,971	21,000	25,298	29,850	34,641	39,661