Umkehrfunktionen

Eine Umkehrfunktion zu f ordnet jedem y-Wert der ursprünglichen Funktion f eindeutig einen zu y gehörigen x-Wert zu. Daher ist es wichtig, das zu jedem y-Wert von f(x) auch nur genau ein x-Wert gehört. Man bezeichnet eine solche Umkehrfunktion als $f^{(-1)}$. Den Graph von $f^{(-1)}$ kann man erhalten, wenn man f an der Winkel-halbierenden (also der Gerade y=x), spiegelt.

Eine Umkehrfunktion von f erhält man, indem man die ursprüngliche Funktion nach x auflöst und die Variablen y und x vertauscht.

Statt f schreibt man f^{-1}.

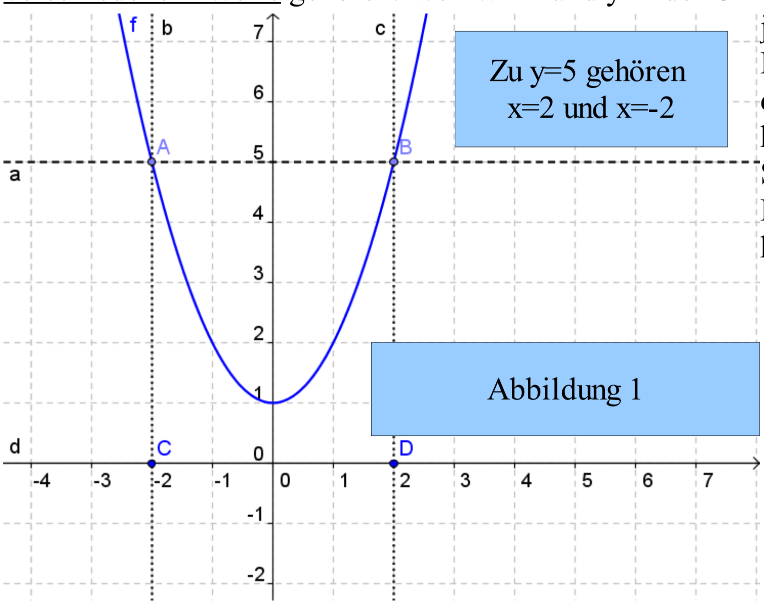
$f(x)=x+2 \quad \Rightarrow f^{(-1)}(x)=x-2$

Ursprünglich:
$y=x+2 \quad |-2$
Umgeformt:
$y-2=x \quad |y \leftarrow\rightarrow x$
Vertauscht:
$y=x-2$

Beispiel 2:

a)	b)	c)
$y=2x+6$	$y=\frac{3}{x}+1$	$y=x^2+1$
$y-6=2x$	$y-1=\frac{3}{x}$	$y-1=x^2$
$\frac{(y-6)}{2}=x$	$x(y-1)=3$	$\pm\sqrt{(y-1)}=x$
$\frac{(x-6)}{2}=y$	$x=\frac{3}{(y-1)}$	$y_1=\sqrt{(x-1)}$
	$y=\frac{3}{(x-1)}$	$y_2=-\sqrt{(x-1)}$

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf das Ergebnis von c) – wir haben auf einmal 2 verschiedene Umkehrfunktionen. Das liegt daran, das bei einer quadratischen Funktion zu jedem y- Wert 2 verschiedene x-Werte gehören. Weil wir x und y in der Umkehrfunktion vertauscht haben, gibt es jetzt zu jedem x-Wert 2 y-Werte. Dieses Phänomen wollen wir kurz ignorieren, das heißt, wir machen absichtlich einen kleinen Fehler, um uns auf die Spiegelsymmetrie zu konzentrieren. Danach sehen wir ein wenig klarer und kommen zur richtigen Lösung zurück.



Beispiel 1: (Fehler ist Absicht!)

$f(x)=x^2+4$	Ursprüngliche Funktion
$y=x^2-4 \;\; \vert +4$	Umformung 1
$y+4=x^2 \;\; \vert \sqrt{()}$	Umformung 2 (???)
$\sqrt{(y+4)}=x$	Variablen vertauschen x ↔ y
$y=\sqrt{(x+4)}$	Und schon haben wir unsere Umkehrfunktion g

Eine der Eigenschaften einer UKF ist, das ihr Graph aussieht, als hätte man den Graphen der Ausgangsfunktion an der Winkel-halbierenden gespiegelt:

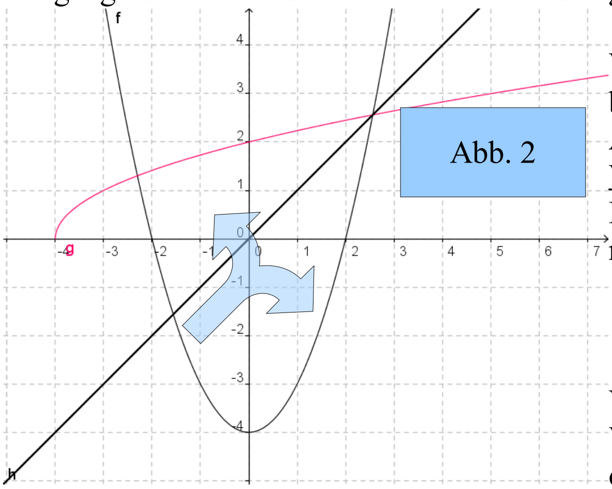


Abb. 2

Wenn man die Wurzel in g: $y=\sqrt{(x+4)}$ betrachtet, stellt man fest, das, falls $x<-4$ ist, der Ausdruck unter der Wurzel – <u>Radikand oder Wurzelbasis</u> – negativ wird.
Die Wurzel einer negativen Zahl ist aber vorerst nicht definiert, weswegen unser Graph nur bis $x=-4$ gezeichnet werden kann.

Vergleicht man nun g mit f, so sieht man, das der Wertebereich von f - alle Zahlen $y>-4$ - eben der Definitionsbereich von g ist. g ist genau da definiert, wo f Werte hat. f kann nur größer als -4 sein, also kann man in g nur x-Werte größer als -4 einsetzen. Der Umkehrschluss, der in vielen Mathematikbüchern gezogen wird..... ist dann wahr, wenn „die Abbildungsvorschrift f :x → (irgendwas) eineindeutig, also bijektiv ist“, was nichts anderes heißt, als das es **<u>zu jedem y nur ein x</u>** geben darf. In der Praxis geht man so vor, das man die ursprüngliche Funktion f so zusammenstreicht, das $f^{(-1)}$ eine Umkehrfunktion ist, man also den Definitionsbereich von f künstlich verkleinert, ihn auf die eineindeutigen Bereiche „einschränkt“. In unserem Beispiel wurde f auf den rechten Ast eingeschränkt.

In unserem Beispiel würde man also sagen: g (die Umkehrfunktion)
a.) kann nur Werte $y\in[0\ldots+\infty]$ (Wertebereich) annehmen und
b.) man kann nur Werte $x\in[-4\ldots+\infty]$ (Definitionsbereich) einsetzen,

Also schränken wir f so ein, das $x>0$ und $y>-4$ sein muss, und behaupten, das sei der Definitionsbereich von f. Eigentlich ist erst jetzt, nachdem wir f eingeschränkt haben, g eine Umkehrfunktion von f und darf sich $f^{(-1)}$ nennen.
Anmerkung: Aus der Sicht eines Mathematikers hätte man f zuerst in die Teile zerlegen müssen, und dann zu jedem monotonen Bereich eine Umkehrfunktion bilden müssen, denn Umkehrfunktionen sind nur in eineindeutigen Bereichen eindeutig definiert.

NACHDEM wir das so zurecht gepfuscht haben, können wir sagen:

$$D_{f^{-1}}=W_f$$
$$W_{f^{-1}}=D_f$$

Bereichesatz für Umkehrfunktionen

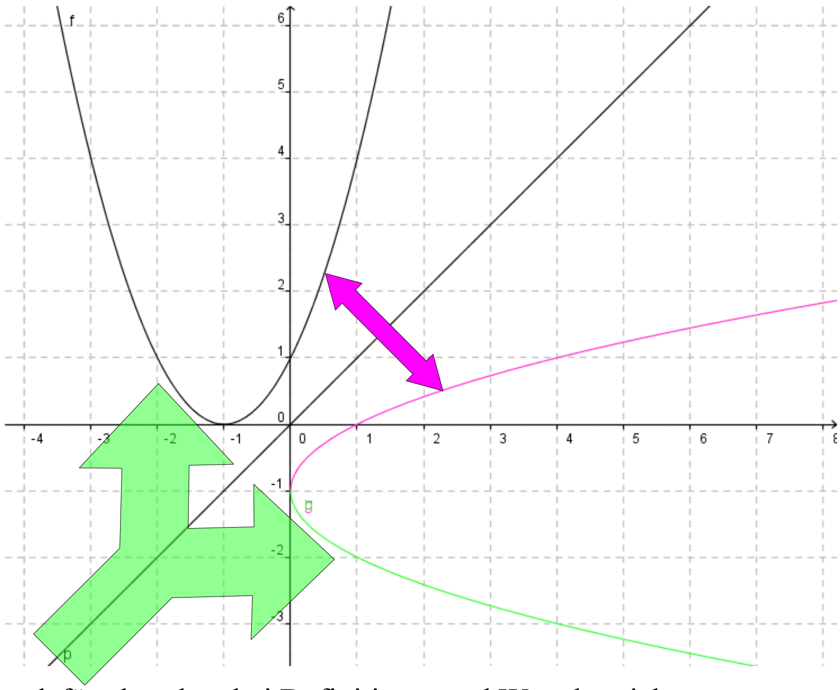
Wo, stellt sich nun die Frage, ist die „untere Hälfte“ der Umkehrfunktion g geblieben? Das liegt an dem absichtlichen Fehler... dazu jetzt:

Kompliziertere Aufgabe (Beispiel 2):

$$y=x^2+2x+1$$
$$0=x^2+2x+1-y$$
$$0=x^2+2x+(1-y)$$

Abbildung 3

p-q-Formel:



$$x_{(1/2)}=-1\pm\sqrt{1^2-(1-y)}$$
$$x_1=-1+\sqrt{+y}$$
$$x_2=-1-\sqrt{+y}$$

$$y_1=-1+\sqrt{+x} \quad \text{g}$$
$$y_2=-1-\sqrt{+x} \quad \text{h}$$

In diesem Beispiel kann man beide Umkehrfunktionen sehen – zu jedem Ast der Ursprünglichen Funktion f gehört eine der beiden Umkehrfunktionen.

Jetzt haben wir auch eine Erklärung dafür, das oben bei Definitions- und Wertebereich sozusagen nur „die halbe Umkehrfunktion" gebildet wurde – es gibt zu jedem der Teile der ursprünglichen Funktion, in denen zu jeweils einem y-Wert nur ein x gehört, eine separate Umkehrfunktion.

Im Beispiel 1 ist also offensichtlich irgendetwas falsch.
Natürlich ist der Fehler Absicht. Wo liegt er?

Untersuchen wir nun, ob $h(x)=-1-\sqrt{x}$ tatsächlich eine Umkehrfunktion von f(x) ist, wie wir ja nach unserer Rechnung vermuten könnten. Wäre h(x) eine UKF von f(x), so müssten nach Mathematikbuch diese Beziehungen gelten:

1.) $f(h(x))=x$
2.) $h(f(x))=x$

1.)
$$f(h(x))=(h(x))^2+2\cdot h(x)+1$$
$$x=(-1-\sqrt{x})^2+2\cdot(-1-\sqrt{x})+1 \qquad NR:(-1-\sqrt{x})^2=1-2\cdot\sqrt{x}+x$$
$$x=1+2\cdot\sqrt{x}+x-2-2\cdot\sqrt{x}+1$$
$x=x$ nach zusammenfassen. So soll das sein!

2.)
$$h(f(x))=-1-\sqrt{f(x)}$$
a $x=-1-\sqrt{x^2+2x+1}$ unter der Wurzel ist eine binomische Formel...
b $x=-1-\sqrt{(x+1)^2}$
c $x=-1-(x+1)$
d $x=-x-2$

Ein wahrlich seltsames Resultat, denn nach dieser Berechnung wäre zwar f eine Umkehrfunktion von h, aber h keine UKF von f. Das wäre, wie zu behaupten, weiß ist das Gegenteil von schwarz aber schwarz nicht das Gegenteil von weiß. Wo liegt also der Fehler?

Ich versuche mal eine Erlärung:

f(x) erzeugt ja , wenn man x einsetzt, einen y- Wert. Wenn man Abbildung 1 oder 3 f(x) aufmerksam betrachtet, dann sieht man, das zu jedem y- Wert zwei verschiedene x- Werte gehören: (x) und (-x-2). Zu y=4, beispielsweise, gehören 1 und -3. Unsere Umkehrfunktionen g und h wissen natürlich nicht, welchen x-wert wir meinen - deswegen kriegen wir ja überhaupt 2 Umkehrfunktionen. Setzen wir nun unseren vorläufigen „Bereichesatz“ ein,

$$D_{f^{-1}}=W_f \quad D_h=\{[0...\infty]\}=W_f$$

soweit ist das in Ordnung

$$W_{f^{-1}}=D_f \quad W_h=[-1....-\infty]=D_f$$

und das ist auch der Definitionsbereich des „linken Astes“ von f.

Spätestens jetzt sollten auch die intelligenteren Schüler anfangen zu weinen.Wo ist bei Rechnung 2 der Fehler? Irgendwas muss da ja schief gelaufen sein, sonst käme ja nicht $x=-x-2$ heraus, sondern x=x.

So... jetzt eifrig nachdenken. Wer das Problem selbst knackt, Bravo!

Postscriptum: Es liegt an der binomischen Formel und tritt generell bei quadratischen Funktionen auf. Es wird von Mathematikbüchern gerne totgeschwiegen. h ist wirklich Umkehrfunktion des linken Astes von f.